



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی مکانیک

پروژه درس ریاضیات پیشرفته

دکتر سید حسین ساداتی

محاسبه سینماتیک مستقیم و معادله حرکت ربات ۶ درجه آزادی جراح

سینا نعمتی نیا

(۹۲۰۷۴۶۴)

علی نصر

(۹۲۰۷۴۳۴)

فهرست

۲.....	فهرست
۳.....	مقدمه
۴.....	تبدیل همگن
۵.....	سینماتیک ربات
۵.....	موقعیت مرکز جرم بازوان
۶.....	سرعت مرکز جرم بازوان
۷.....	روش لاگرانژ
۷.....	انرژی جنبشی
۱۰.....	انرژی پتانسیل
۱۱.....	معادله فضای حالت دکارتی
۳۱.....	شبیه‌سازی دینامیکی
۳۲.....	پیوست

سیستم جراحی به کمک رباتیک برای برداشتن پروستات، تعمیر دریچه قلبی و جراحی زنان و زایمان استفاده میشود. جراحی رباتیک (ماشینی): جراحی به کمک کامپیوتر و نیز جراحی به کمک رباتیک از شرایط توسعه های تکنولوژی هستند که از سیستم های رباتیک برای کمک به عمل جراحی استفاده میکنند. جراحی رباتیک برای غلبه بر محدودیت های عمل جراحی با حداقل تهاجم و نیز افزایش قابلیت جراحان برای انجام عمل های جراحی باز توسعه داده شد.

در زمینه ی عمل جراحی رباتیک با حداقل تهاجم جراح به جای حرکت مستقیم ابزار از یکی از ۵ روش کنترل ابزار از جمله هدایت دستگاه دست ورزی از راه دور و یا از طریق کامپیوتر استفاده میکند.

یک دستگاه دست ورزی از راه دور کنترل از راه دوریست که به جراح اجازه میدهد تا حرکات معمول مرتبط با جراحی را در حالی که بازوهای مکانیکی حرکات را با استفاده از مجری های نهایی و دستگاه دست ورزی از راه دور برای انجام جراحی واقعی بر روی بیمار به انجام میرسانند کنترل کند. در سیستم کنترل کامپیوتری جراح از کامپیوتر برای کنترل بازوهای مکانیکی و مجری های نهایی آن استفاده میکند هر چند که این سیستم میتواند از دستگاه دست ورزی از راه دور نیز برای ورودی خود استفاده کند. یکی از مزایای استفاده از روش های کامپیوتری این است که جراح میتواند عمل جراحی را در هر جای جهان که باشد از راه دور انجام دهد و به حضور وی نیازی نیست.



شکل ۱: ربات جراح ۴ بازویی

در جراحی باز پیشرفته، ابزار مستقل (در تنظیمات آشنا) جایگزین ابزار فولادی قدیمی شده اند، و اعمال خاصی (مانند باز کردن دنده ها) با ملایمتی بیشتر از آنچه می توانست به دست بشر محقق گردد به انجام میرسند. هدف اصلی از این ابزار هوشمند کاهش یا از بین بردن آسیب بافتی به روش سنتی با جراحی باز بدون نیاز به آموزش بیش از چند دقیقه ی مربوط به جراحان است. این رویکرد به دنبال بهبود جراحی باز به خصوص قلب و قفسه ی سینه که تاکنون از تکنیک های حداقل تهاجم بهره مند نشده اند می باشد.

تبدیل همگن

تبدیل همگن را که ماتریسی 4×4 است و اطلاعات مربوط به مکان و جهت گیری را در خود دارد، به منزله ابزاری عمومی برای نمایش چهارچوب ها معرفی کردیم.

برای تبدیل همگن سه نوع تغییر ارائه کردیم:

۱. این تبدیل، توصیف یک چهارچوب است. ${}^A T_B$ چهارچوب $\{B\}$ را نسبت به $\{A\}$ توصیف می کند. به ویژه

ستون های ${}^A R_B$ بردارهای یکه هستند که راستای محورهای اصلی $\{B\}$ را معرفی می کنند، و

${}^A P_{BORG}$ نیز مکانم بدا دستگاه مختصات $\{B\}$ را نشان می دهد.

۲. این تبدیل یک نگاشت است. ${}^A T_B$ تصویر ${}^B P$ را روی ${}^A P$ به دست می دهد.

۳. این تبدیل، یک عملگر تبدیل است. T روی ${}^A P_1$ عمل می کند و ${}^A P_2$ را به دست می دهد.

$${}^0 T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$${}^2 T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & L1 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$${}^3 T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\cos(\theta_4) \cdot \sin(\theta_3) & \sin(\theta_3) \cdot \sin(\theta_4) & L2 \\ 0 & -\sin(\theta_4) & -\cos(\theta_4) & 0 \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) \cdot \cos(\theta_4) & -\cos(\theta_3) \cdot \sin(\theta_4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_5) & -\cos(\theta_6)\sin(\theta_5) & \sin(\theta_5)\sin(\theta_6) & L_3 \\ \sin(\theta_5) & \cos(\theta_5)\cos(\theta_6) & -\cos(\theta_5)\sin(\theta_6) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_6) & \cos(\theta_6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

سینماتیک ربات

سینماتیک علم حرکت است که حرکت را بدون در نظر گرفتن نیروی ایجادکننده آن مطالعه می‌کند. در محدوده علم سینماتیک، مکان، سرعت، شتاب و همه‌ی مشتق‌های مرتبه بالاتر از متغیرهای مکان (نسبت به زمان یا هر متغیر یا متغیرهای دیگر) بررسی می‌شود. بدین ترتیب، سینماتیک بازوهای مکانیکی ماهر همه‌ی ویژگی‌های هندسی و وابسته به زمان حرکت را در بر می‌گیرد.

موقعیت مرکز جرم بازوان

$${}^0_1r = \begin{cases} (L_1 \cos(\theta_1))/2 \\ (L_1 \sin(\theta_1))/2 \\ 0 \end{cases} \quad (5)$$

$${}^0_2r = \begin{cases} (L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2))/2 + L_1 \cos(\theta_1) \\ (L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2))/2 + L_1 \sin(\theta_1) \\ 0 \end{cases} \quad (6)$$

$${}^0_3r = \begin{cases} L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_1 \cos(\theta_1) + (L_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3))/2 \\ L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_1 \sin(\theta_1) + (L_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3))/2 \\ (L_3 \sin(\theta_3))/2 \end{cases} \quad (7)$$

$${}^0_4r = \begin{cases} (L4*(\sin(\theta_5)*(\sin(\theta_4)*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1)) \\ - \cos(\theta_4)*\sin(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2))) + \\ \cos(\theta_3)*\cos(\theta_5)* \\ (\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2)))/2 + L2*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) \\ - \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2)) + L1*\cos(\theta_1) + L3*\cos(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) \\ - \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2)) \\ L2*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1)) - (L4*(\sin(\theta_5)*(\sin(\theta_4) \\ *(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2)) + \cos(\theta_4)*\sin(\theta_3)*(\cos(\theta_1) \\ * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \\ * \sin(\theta_1))) - \cos(\theta_3)*\cos(\theta_5)*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1))) \\ /2 + L1*\sin(\theta_1) + L3*\cos(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1)) \\ (L4*(\cos(\theta_5)*\sin(\theta_3) + \cos(\theta_3)*\cos(\theta_4)*\sin(\theta_5)))/2 + L3*\sin(\theta_3) \end{cases} \quad (8)$$

سرعت مرکز جرم بازوان

$${}^0_1v = \begin{cases} -(L1*d\theta_1*\sin(\theta_1))/2 \\ (L1*d\theta_1*\cos(\theta_1))/2 \\ 0 \end{cases} \quad (9)$$

$${}^0_2v = \begin{cases} -d\theta_1*((L2*\sin(\theta_1 + \theta_2))/2 + L1*\sin(\theta_1)) - (L2*d\theta_2*\sin(\theta_1 + \theta_2))/2 \\ d\theta_1*((L2*\cos(\theta_1 + \theta_2))/2 + L1*\cos(\theta_1)) + (L2*d\theta_2*\cos(\theta_1 + \theta_2))/2 \\ 0 \end{cases} \quad (10)$$

$${}^0_3v = \begin{cases} L2*\cos(\theta_1 + \theta_2) + L1*\cos(\theta_1) + (L3*\cos(\theta_1 + \theta_2)*\cos(\theta_3))/2 \\ L2*\sin(\theta_1 + \theta_2) + L1*\sin(\theta_1) + (L3*\sin(\theta_1 + \theta_2)*\cos(\theta_3))/2 \\ (L3*\sin(\theta_3))/2 \end{cases} \quad (11)$$

$$v_{04} = \left\{ \begin{aligned} & (L4 * (\sin(\theta_5) * (\sin(\theta_4) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) \\ & - \cos(\theta_4) * \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) \\ & + \cos(\theta_3) * \cos(\theta_5) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) / 2 \\ & + L2 * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) + L1 * \cos(\theta_1) + L3 * \\ & \cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) \\ & L2 * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) - (L4 * (\sin(\theta_5) * (\sin(\theta_4) \\ & * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) + \cos(\theta_4) * \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \\ & * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1))) - \cos(\theta_3) * \cos(\theta_5) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) \\ & + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1))) / 2 + L1 * \sin(\theta_1) + L3 * \cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) \\ & + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) \\ & (L4 * (\cos(\theta_5) * \sin(\theta_3) + \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_5))) / 2 + L3 * \sin(\theta_3) \end{aligned} \right. \quad (12)$$

روش لاگرانژ

رهیافت روش نیوتن-اویلر با دینامیک را می‌توان از نوع «تعداد نیرو» در نظر گرفت، در صورتی که روش لاگرانژ، رهیافتی بر پایه «انرژی» دارد. البته برای بازوهای مکانیکی ماهر یکسان، هر دو روش به یک نتیجه خواهند رسید. بررسی ما از دینامیک لاگرانژی مختصر و مربوط به حالت خاص یک بازوی مکانیکی ماهر زنجیری با رابط های صلب خواهد بود.

انرژی جنبشی

ابتدا عبارتی برای انرژی جنبشی بازوی مکانیکی ماهر به دست می‌آوریم. انرژی جنبشی رابط i ام، (k_i) ، را می‌توان چنین نوشت:

$$k_i = \frac{1}{2} m_i v_{c_i}^T v_{c_i} + \frac{1}{2} {}^i w_i^T {}^i I_i {}^i w_i \quad (13)$$

که در آن جمله اول، انرژی جنبشی حاصل از سرعت خطی مرکز جرم رابط، و جمله دوم، انرژی جنبشی ناشی از سرعت دورانی رابط است. انرژی جنبشی کل بازو برابر با مجموع انرژی های جنبشی هر یک از رابط‌هاست. یعنی:

$$k = \sum_{i=1}^n k_i \quad (14)$$

چون جمله‌های v_{c_i} و w_i در (15) توابعی از θ و $\dot{\theta}$ هستند، انرژی جنبشی هر بازوی مکانیکی ماهر را می‌توان با عبارتی اسکالر به صورت تابعی از مکان و سرعت مفصل‌ها، $k(\theta, \dot{\theta})$ ، بیان کرد. بدین ترتیب، انرژی جنبشی بازو را چنین نوشت:

$$k(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta} \quad (16)$$

که در آن $M(\theta)$ ماتریس جرم $n \times n$ است. عبارتی به صورت رابطه (۴،۱) را صورت درجه دو [5] می‌نامند، زیرا معادله اسکالر حاصل از بسط آن، صرفاً از جمله‌هایی تشکیل می‌شود که وابستگی آن‌ها به $\dot{\theta}_i$ از درجه دوم است. همچنین، چون انرژی جنبشی کل همواره مثبت است، ماتریس جرم بازوی مکانیکی ماهر باید ماتریسی معین مثبت باشد. دیده می‌شود که معادله (۴،۱) را می‌توان با عبارت آشنای انرژی جنبشی یک جرم نقطه‌ای، قیاس کرد.

$$k = \frac{1}{2} m v^2 \quad (17)$$

معین مثبت بودن ماتریس جرم بازو را نیز می‌توان با همواره مثبت بودن جرم اسکالر، قیاس کرد.

$$T_1 = (m_1 * L_1^2 * d\theta_1^2 * \cos(\theta_1)^2) / 8 + (m_1 * L_1^2 * d\theta_1^2 * \sin(\theta_1)^2) / 8 + (m_1 * L_1^2 * d\theta_1^2) / 24 \quad (18)$$

$$T_2 = (m_2 * (d\theta_1 * ((L_2 * \cos(\theta_1 + \theta_2)) / 2 + L_1 * \cos(\theta_1)) + (L_2 * d\theta_2 * \cos(\theta_1 + \theta_2)) / 2)^2) / 2 + (m_2 * (d\theta_1 * ((L_2 * \sin(\theta_1 + \theta_2)) / 2 + L_1 * \sin(\theta_1)) + (L_2 * d\theta_2 * \sin(\theta_1 + \theta_2)) / 2)^2) / 2 + (L_2^2 * m_2 * (d\theta_1 + d\theta_2)^2) / 24 \quad (19)$$

$$T_3 = (m_3 * (d\theta_1 * (L_2 * \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_1 * \cos(\theta_1)) + (L_3 * \cos(\theta_1 + \theta_2) * \cos(\theta_3)) / 2 + d\theta_2 * (L_2 * \cos(\theta_1 + \theta_2) + (L_3 * \cos(\theta_1 + \theta_2) * \cos(\theta_3)) / 2) - (L_3 * d\theta_3 * \sin(\theta_1 + \theta_2) * \sin(\theta_3)) / 2)^2) / 2 + (m_3 * (d\theta_1 * (L_2 * \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_1 * \sin(\theta_1)) + (L_3 * \sin(\theta_1 + \theta_2) * \cos(\theta_3)) / 2 + d\theta_2 * (L_2 * \sin(\theta_1 + \theta_2) + (L_3 * \sin(\theta_1 + \theta_2) * \cos(\theta_3)) / 2) + (L_3 * d\theta_3 * \cos(\theta_1 + \theta_2) * \sin(\theta_3)) / 2)^2) / 2 + (L_3^2 * m_3 * (d\theta_3 - \cos(\theta_3) * \sin(\theta_4) * (d\theta_1 + d\theta_2))^2) / 24 + (L_3^2 * d\theta_3^2 * m_3 * \cos(\theta_3)^2) / 8 + (L_3^2 * m_3 * \cos(\theta_3)^2 * \cos(\theta_4)^2 * (d\theta_1 + d\theta_2)^2) / 24 \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
T_4 = & (m_4 * (d\theta_3 * ((L_4 * (\cos(\theta_5) * \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) \\
& + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) + \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_5) * (\cos(\theta_1) \\
& * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)))) / 2 + L_3 * \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \\
& \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1))) - d\theta_2 * ((L_4 * (\sin(\theta_5) * (\sin(\theta_4) \\
& * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) - \cos(\theta_4) * \sin(\theta_3) * \\
& (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) + \cos(\theta_3) * \cos(\theta_5) \\
& * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)))) / 2 + L_2 * (\cos(\theta_1) * \\
& \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) + L_3 * \cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) \\
& - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) - d\theta_1 * ((L_4 * (\sin(\theta_5) * (\sin(\theta_4) * (\cos(\theta_1) \\
& * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) - \cos(\theta_4) * \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \\
& * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) + \cos(\theta_3) * \cos(\theta_5) * (\cos(\theta_1) \\
& * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)))) / 2 + L_2 * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \\
& \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) + L_1 * \cos(\theta_1) + L_3 * \cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \\
& \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) + (L_4 * d\theta_5 * (\cos(\theta_5) * (\sin(\theta_4) \\
& * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) + \cos(\theta_4) * \sin(\theta_3) \\
& * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1))) + \cos(\theta_3) * \sin(\theta_5) \\
& * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)))) / 2 + (L_4 * d\theta_4 * \sin(\theta_5) \\
& * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) - \sin(\theta_3) \\
& * \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)))) / 2 + \\
& (m_4 * (d\theta_1 * (L_2 * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) - \\
& (L_4 * (\sin(\theta_5) * (\sin(\theta_4) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) \\
& + \cos(\theta_4) * \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1))) \\
& - \cos(\theta_3) * \cos(\theta_5) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)))) / 2 \\
& + L_1 * \cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1))) + d\theta_3 \\
& * ((L_4 * (\cos(\theta_5) * \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) \\
& + \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_5) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \\
& * \sin(\theta_2)))) / 2 + L_3 * \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \\
& \sin(\theta_2))) - (L_4 * d\theta_5 * (\cos(\theta_5) * (\sin(\theta_4) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) \\
& + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) - \cos(\theta_4) * \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) \\
& - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) - \cos(\theta_3) * \sin(\theta_5) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) \\
& - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)))) / 2 - (L_4 * d\theta_4 * \sin(\theta_5) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_1) \\
& * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) + \sin(\theta_3) * \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_1) \\
& * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)))) / 2)^2) / 2 + (m_4 * ((L_4 * d\theta_5 * \\
& (\sin(\theta_3) * \sin(\theta_5) - \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \cos(\theta_5))) / 2 - d\theta_3 * \\
& ((L_4 * (\cos(\theta_3) * \cos(\theta_5) - \cos(\theta_4) * \sin(\theta_3) * \sin(\theta_5))) / 2 + L_3 * \\
& \cos(\theta_3)) + (L_4 * d\theta_4 * \cos(\theta_3) * \sin(\theta_4) * \sin(\theta_5)) / 2)^2) / 2 + \\
& (L_4^2 * m_4 * (d\theta_5 + \cos(\theta_6) * (d\theta_3 - \cos(\theta_3) * \sin(\theta_4) * (d\theta_1 \\
& + d\theta_2))) + \sin(\theta_5) * \sin(\theta_6) * (d\theta_4 + \sin(\theta_3) * (d\theta_1 + d\theta_2)) \\
& - \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \cos(\theta_5) * \sin(\theta_6) * (d\theta_1 + d\theta_2))^2) / 24 + \\
& (L_4^2 * m_4 * (\sin(\theta_6) * (d\theta_3 - \cos(\theta_3) * \sin(\theta_4) * (d\theta_1 + d\theta_2)) \\
& - \cos(\theta_6) * \sin(\theta_5) * (d\theta_4 + \sin(\theta_3) * (d\theta_1 + d\theta_2)) + \cos(\theta_3) \\
& * \cos(\theta_4) * \cos(\theta_5) * \cos(\theta_6) * (d\theta_1 + d\theta_2))^2) / 24
\end{aligned} \tag{21}$$

انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل رابطه i ام، u_i ، را می توان چنین نوشت.

$$u_i = -m_i \cdot g^T \cdot p_{c_i} + u_{ref_i} \quad (22)$$

که در آن g بردار 3×1 گرانی، و p_{c_i} بردار نشان دهنده مکان مرکز جرم رابط i ام، و u_{ref_i} ثابتی است که برای صفر شدن مقدار مینیمم u_i در نظر گرفته می شود. انرژی پتانسیل کل ذخیره شده در بازو برابر با مجموع انرژی های پتانسیل هر یک از رابط هاست.

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \quad (23)$$

چون p_{c_i} در $(\theta, 1)$ تابعی از θ هستند، انرژی پتانسیل بازو را می توان به صورت تابعی اسکالر از مکان مفصل، $u(\theta)$ ، توصیف کرد.

$$U_1 = 0 \quad (24)$$

$$U_2 = 0 \quad (25)$$

$$U_3 = (L3 * g * m3 * \sin(\theta_3)) / 2 \quad (26)$$

$$U_4 = g * m4 * ((L4 * (\cos(\theta_5) * \sin(\theta_3) + \cos(\theta_3)) * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_5))) / 2 + L3 * \sin(\theta_3) \quad (27)$$

روش دینامیکی لاگرانژ، ابزاری را برای به دست آوردن معادله های حرکت از تابعی اسکالر به نام لاگرانژین، که به صورت اختلاف بین انرژی های پتانسیل و جنبشی یک سیستم مکانیکی تریف شده است، فراهم می آورد. مطابق با نماد گذاری ما، لاگرانژین هر بازوی مکانیکی ماهر چنین خواهد بود.

$$\ell(\theta, \dot{\theta}) = k(\theta, \dot{\theta}) - u(\theta) \quad (28)$$

پس معادله های حرکت بازو نیز چنین به دست می آیند

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \tau \quad (29)$$

که در آن τ برداری $1 \times n$ از گشتاور کار انداز است. در مورد بازوی مکانیکی ماهر، این معادله چنین بیان می‌شود.

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial k}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial k}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} = \tau \quad (30)$$

که در آن $k(0)$ و $u(0)$ به منظور رعایت اختصار، حذف شده‌اند.

معادله فضای حالت دکارتی

گاهی ممکن است بخواهیم معادله دینامیکی یک بازوی مکانیکی ماهر را نسبت به متغیرهای دکارتی به صورت کلی زیر بنویسیم:

$$F = M_x(\theta)\ddot{x} + V_x(\theta, \dot{\theta}) + G_x(\theta) \quad (31)$$

که در آن F بردار نیرو گشتاوری است که بر مجری نهایی روبات وارد می‌شود، و X بردار دکارتی مناسب برای نمایش مکان و جهت‌گیری مجری نهایی است. نظیر کمیت‌های فضای مفصلی، $M_x(\theta)$ ماتریس جرم دکارتی، $V_x(\theta, \dot{\theta})$ بردار شامل جمله‌های وابسته به سرعت در فضای دکارتی و $G_x(\theta)$ بردار شامل جمله‌های وابسته به گرانی در فضای دکارتی است. توجه کنید که نیروهای فرضی F وارد بر مجری نهایی، می‌تواند در حقیقت توسط کار اندازهای واقع در مفصل‌ها، یا کاربرد رابطه زیر اعمال شوند

$$\tau = J^T(\theta)F \quad (32)$$

که در ژاکوبی $J(\theta)$ نیز در همان چهارچوب F و \ddot{x} ، که معمولاً چهارچوب ابزار $\{T\}$ است، نوشته شده است.

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & M_{16} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} & M_{36} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} & M_{56} \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
M_{11} = & (L1^2 * m1) / 3 + L1^2 * m2 + L1^2 * m3 + (L2^2 * m2) / 3 + L1^2 * m4 \\
& + L2^2 * m3 + L2^2 * m4 + (L4^2 * m4) / 3 + (L3^2 * m3 * \cos(\theta_3)^2) / 3 + \\
& L3^2 * m4 * \cos(\theta_3)^2 - (L4^2 * m4 * \cos(\theta_5)^2) / 3 + L1 * L2 * m2 \\
& * \cos(\theta_2) + 2 * L1 * L2 * m3 * \cos(\theta_2) + 2 * L1 * L2 * m4 * \cos(\theta_2) \\
& + L2 * L3 * m3 * \cos(\theta_3) + 2 * L2 * L3 * m4 * \cos(\theta_3) - (L4^2 * m4 \\
& * \cos(\theta_3)^2 * \cos(\theta_4)^2) / 3 + (L4^2 * m4 * \cos(\theta_3)^2 * \cos(\theta_5)^2) \\
& / 3 + L1 * L3 * m3 * \cos(\theta_2) * \cos(\theta_3) + 2 * L1 * L3 * m4 * \cos(\theta_2) \\
& * \cos(\theta_3) + L2 * L4 * m4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_5) + (L4^2 * m4 * \\
& \cos(\theta_3)^2 * \cos(\theta_4)^2 * \cos(\theta_5)^2) / 3 + L3 * L4 * m4 * \cos(\theta_3)^2 \\
& * \cos(\theta_5) - L2 * L4 * m4 * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_3) * \sin(\theta_5) + L1 * L4 * m4 \\
& * \sin(\theta_2) * \sin(\theta_4) * \sin(\theta_5) + L1 * L4 * m4 * \cos(\theta_2) * \cos(\theta_3) \\
& * \cos(\theta_5) - (2 * L4^2 * m4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \cos(\theta_5) \\
& * \sin(\theta_3) * \sin(\theta_5)) / 3 - L1 * L4 * m4 * \cos(\theta_2) * \cos(\theta_4) \\
& * \sin(\theta_3) * \sin(\theta_5) - L3 * L4 * m4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_3) * \sin(\theta_5) \quad (34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{12} = & (L2^2 * m2) / 3 + L2^2 * m3 + L2^2 * m4 + (L4^2 * m4) / 3 + (L3^2 * m3 * \\
& \cos(\theta_3)^2) / 3 + L3^2 * m4 * \cos(\theta_3)^2 - (L4^2 * m4 * \cos(\theta_5)^2) \\
& / 3 + (L1 * L2 * m2 * \cos(\theta_2)) / 2 + L1 * L2 * m3 * \cos(\theta_2) + L1 \\
& * L2 * m4 * \cos(\theta_2) + L2 * L3 * m3 * \cos(\theta_3) + 2 * L2 * L3 * m4 \\
& * \cos(\theta_3) - (L4^2 * m4 * \cos(\theta_3)^2 * \cos(\theta_4)^2) / 3 \\
& + (L4^2 * m4 * \cos(\theta_3)^2 * \cos(\theta_5)^2) / 3 + (L1 * L3 * m3 * \\
& \cos(\theta_2) * \cos(\theta_3)) / 2 + L1 * L3 * m4 * \cos(\theta_2) \\
& * \cos(\theta_3) + L2 * L4 * m4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_5) + (L4^2 \\
& * m4 * \cos(\theta_3)^2 * \cos(\theta_4)^2 * \cos(\theta_5)^2) / 3 + L3 \\
& * L4 * m4 * \cos(\theta_3)^2 * \cos(\theta_5) - L2 * L4 * m4 * \cos(\theta_4) \\
& * \sin(\theta_3) * \sin(\theta_5) + (L1 * L4 * m4 * \sin(\theta_2) * \sin(\theta_4) \\
& * \sin(\theta_5)) / 2 + (L1 * L4 * m4 * \cos(\theta_2) * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_5)) \\
& / 2 - (2 * L4^2 * m4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \cos(\theta_5) * \sin(\theta_3) \\
& * \sin(\theta_5)) / 3 - (L1 * L4 * m4 * \cos(\theta_2) * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_3) \\
& * \sin(\theta_5)) / 2 - L3 * L4 * m4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_3) \\
& * \sin(\theta_5)
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
M_{13} = & (L4^2 * m4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \cos(\theta_5)^2 * \sin(\theta_4)) / 4 \\
& - (L4^2 * m4 * \cos(\theta_3) * \sin(\theta_4)) / 12 - (L4^2 * m4 * \cos(\theta_3) \\
& * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_4)) / 4 - (L1 * L3 * m3 * \sin(\theta_2) * \sin(\theta_3)) \\
& / 2 - L1 * L3 * m4 * \sin(\theta_2) * \sin(\theta_3) - (L4^2 * m4 * \cos(\theta_5) * \sin(\theta_3) \\
& * \sin(\theta_4) * \sin(\theta_5)) / 4 - (L1 * L4 * m4 * \cos(\theta_5) * \sin(\theta_2) \\
& * \sin(\theta_3)) / 2 - (L3 * L4 * m4 * \sin(\theta_3) * \sin(\theta_4) * \sin(\theta_5)) \\
& / 2 - (L3^2 * m3 * \cos(\theta_3) * \sin(\theta_4)) / 12 - (L1 * L4 * m4 * \cos(\theta_3) \\
& * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_2) * \sin(\theta_5)) / 2
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
M_{14} = & -(L4 * m4 * (2 * L4 * \sin(\theta_3) * \cos(\theta_5)^2 + 2 * L4 * \cos(\theta_3) \\
& * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_5) * \cos(\theta_5) - 2 * L4 * \sin(\theta_3) + 3 * L2 \\
& * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_5) + 3 * L1 * \cos(\theta_2) * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_5) + \\
& 3 * L3 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_5) - 3 * L1 * \sin(\theta_2) * \\
& \sin(\theta_3) * \sin(\theta_4) * \sin(\theta_5))) / 6
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
M_{15} = & -(L4*m4*(6*L2*cos(theta5)*sin(theta4) + 3*L4*cos(theta3) \\
& *sin(theta4) + 6*L1*cos(theta2)*cos(theta5)*sin(theta4) + 6*L3* \\
& cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta4) + L4*cos(theta3)*cos(theta6) \\
& *sin(theta4) + 6*L1*cos(theta3)*sin(theta2)*sin(theta5) - L4*sin(theta3) \\
& *sin(theta5)*sin(theta6) + L4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5) \\
& *sin(theta6) + 6*L1*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta2)*sin(theta3))/12
\end{aligned} \tag{38}$$

$$M_{16} = 0 \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
M_{21} = & (L2^2 * m2) / 3 + L2^2 * m3 + L2^2 * m4 + (L4^2 * m4) / 3 + (L3^2 * m3 * \\
& cos(theta3)^2) / 3 + L3^2 * m4 * cos(theta3)^2 - (L4^2 * m4 * cos(theta5)^2) \\
& / 3 + (L1*L2*m2*cos(theta2))/2 + L1*L2*m3*cos(theta2) + L1*L2*m4* \\
& cos(theta2) + L2 * L3 * m3 * cos(theta3) + 2 * L2 * L3 * m4 * cos(theta3) - (L4^2 \\
& * m4 * cos(theta3)^2 * cos(theta4)^2) / 3 + (L4^2 * m4 * cos(theta3)^2 * cos(theta5)^2) \\
& / 3 + (L1*L3*m3*cos(theta2)*cos(theta3))/2 + L1*L3*m4*cos(theta2)* \\
& cos(theta3) + L2 * L4 * m4 * cos(theta3) * cos(theta5) + (L4^2 * m4 * cos(theta3)^2 \\
& * cos(theta4)^2 * cos(theta5)^2) / 3 + L3 * L4 * m4 * cos(theta3)^2 * cos(theta5) \\
& - L2*L4*m4*cos(theta4)*sin(theta3)*sin(theta5) + (L1*L4*m4*sin(theta2) \\
& *sin(theta4)*sin(theta5))/2 + (L1*L4*m4*cos(theta2)*cos(theta3) \\
& *cos(theta5)) / 2 - (2 * L4^2 * m4 * cos(theta3) * cos(theta4) * cos(theta5) \\
& *sin(theta3)*sin(theta5))/3 - (L1*L4*m4*cos(theta2)*cos(theta4)*sin(theta3) \\
& *sin(theta5))/2 - L3*L4*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*sin(theta3)*sin(theta5)
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
M_{22} = & (L2^2 * m2) / 3 + L2^2 * m3 + L2^2 * m4 + (L4^2 * m4) / 3 + (L3^2 * m3 * \\
& cos(theta3)^2) / 3 + L3^2 * m4 * cos(theta3)^2 - (L4^2 * m4 * cos(theta5)^2) / 3 + \\
& L2 * L3 * m3 * cos(theta3) + 2 * L2 * L3 * m4 * cos(theta3) - (L4^2 * m4 * cos(theta3)^2 \\
& * cos(theta4)^2) / 3 + (L4^2 * m4 * cos(theta3)^2 * cos(theta5)^2) / 3 + L2 * L4 * m4 \\
& * cos(theta3) * cos(theta5) + (L4^2 * m4 * cos(theta3)^2 * cos(theta4)^2 \\
& * cos(theta5)^2) / 3 + L3 * L4 * m4 * cos(theta3)^2 * cos(theta5) - L2 * L4 * m4 * cos(theta4) \\
& * sin(theta3) * sin(theta5) - (2 * L4^2 * m4 * cos(theta3) * cos(theta4) \\
& * cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta5))/3 - L3*L4*m4*cos(theta3)*cos(theta4) \\
& *sin(theta3)*sin(theta5)
\end{aligned} \tag{41}$$

$$M_{23} = -(\sin(\theta_4) * (L_3^2 * m_3 * \cos(\theta_3) + L_4^2 * m_4 * \cos(\theta_3) + 3 * L_4^2 * m_4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) + 3 * L_4^2 * m_4 * \cos(\theta_5) * \sin(\theta_3) * \sin(\theta_5) + 6 * L_3 * L_4 * m_4 * \sin(\theta_3) * \sin(\theta_5) - 3 * L_4^2 * m_4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \cos(\theta_5)^2)) / 12 \quad (42)$$

$$M_{24} = -(L_4 * m_4 * (2 * L_4 * \sin(\theta_3) * \cos(\theta_5)^2 + 2 * L_4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_5) * \cos(\theta_5) - 2 * L_4 * \sin(\theta_3) + 3 * L_2 * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_5) + 3 * L_3 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_5))) / 6 \quad (43)$$

$$M_{25} = -(L_4 * m_4 * (6 * L_2 * \cos(\theta_5) * \sin(\theta_4) + 3 * L_4 * \cos(\theta_3) * \sin(\theta_4) + 6 * L_3 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_5) * \sin(\theta_4) + L_4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_6) * \sin(\theta_4) - L_4 * \sin(\theta_3) * \sin(\theta_5) * \sin(\theta_6) + L_4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \cos(\theta_5) * \sin(\theta_6))) / 12 \quad (44)$$

$$M_{26} = 0 \quad (45)$$

$$M_{31} = (L_4^2 * m_4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \cos(\theta_5)^2 * \sin(\theta_4)) / 4 - (L_4^2 * m_4 * \cos(\theta_3) * \sin(\theta_4)) / 12 - (L_4^2 * m_4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_4)) / 4 - (L_1 * L_3 * m_3 * \sin(\theta_2) * \sin(\theta_3)) / 2 - L_1 * L_3 * m_4 * \sin(\theta_2) * \sin(\theta_3) - (L_4^2 * m_4 * \cos(\theta_5) * \sin(\theta_3) * \sin(\theta_4) * \sin(\theta_5)) / 4 - (L_1 * L_4 * m_4 * \cos(\theta_5) * \sin(\theta_2) * \sin(\theta_3)) / 2 - (L_3 * L_4 * m_4 * \sin(\theta_3) * \sin(\theta_4) * \sin(\theta_5)) / 2 - (L_3^2 * m_3 * \cos(\theta_3) * \sin(\theta_4)) / 12 - (L_1 * L_4 * m_4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_2) * \sin(\theta_5)) / 2 \quad (46)$$

$$M_{32} = -(\sin(\theta_4) * (L_3^2 * m_3 * \cos(\theta_3) + L_4^2 * m_4 * \cos(\theta_3) + 3 * L_4^2 * m_4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) + 3 * L_4^2 * m_4 * \cos(\theta_5) * \sin(\theta_3) * \sin(\theta_5) + 6 * L_3 * L_4 * m_4 * \sin(\theta_3) * \sin(\theta_5) - 3 * L_4^2 * m_4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \cos(\theta_5)^2)) / 12 \quad (47)$$

$$M_{33} = (L_3^2 * m_3) / 3 + L_3^2 * m_4 + (L_4^2 * m_4) / 3 + L_3 * L_4 * m_4 - (L_4^2 * m_4 * \sin(\theta_4)^2 * \sin(\theta_5)^2) / 4 - 2 * L_3 * L_4 * m_4 * \sin(\theta_5 / 2)^2 \quad (48)$$

$$M_{34} = -(L_4 * m_4 * \sin(\theta_4) * \sin(\theta_5) * (2 * L_3 + L_4 * \cos(\theta_5))) / 4 \quad (49)$$

$$M_{35} = (L_4 * m_4 * (3 * L_4 * \cos(\theta_4) + L_4 * \cos(\theta_6) + 6 * L_3 * \cos(\theta_4) * \cos(\theta_5))) / 12 \quad (50)$$

$$M_{36} = 0 \quad (51)$$

$$M_{41} = -(L4 * m4 * (2 * L4 * \sin(\theta3) * \cos(\theta5)^2 + 2 * L4 * \cos(\theta3) * \cos(\theta4) * \sin(\theta5) * \cos(\theta5) - 2 * L4 * \sin(\theta3) + 3 * L2 * \cos(\theta4) * \sin(\theta5) + 3 * L1 * \cos(\theta2) * \cos(\theta4) * \sin(\theta5) + 3 * L3 * \cos(\theta3) * \cos(\theta4) * \sin(\theta5) - 3 * L1 * \sin(\theta2) * \sin(\theta3) * \sin(\theta4) * \sin(\theta5))) / 6 \quad (52)$$

$$M_{42} = -(L4 * m4 * (2 * L4 * \sin(\theta3) * \cos(\theta5)^2 + 2 * L4 * \cos(\theta3) * \cos(\theta4) * \sin(\theta5) * \cos(\theta5) - 2 * L4 * \sin(\theta3) + 3 * L2 * \cos(\theta4) * \sin(\theta5) + 3 * L3 * \cos(\theta3) * \cos(\theta4) * \sin(\theta5))) / 6 \quad (53)$$

$$M_{43} = -(L4 * m4 * \sin(\theta4) * \sin(\theta5) * (2 * L3 + L4 * \cos(\theta5))) / 4 \quad (54)$$

$$M_{44} = (L4^2 * m4 * \sin(\theta5)^2) / 3 \quad (55)$$

$$M_{45} = (L4^2 * m4 * \sin(\theta5) * \sin(\theta6)) / 12 \quad (56)$$

$$M_{46} = 0 \quad (57)$$

$$M_{51} = -(L4 * m4 * (6 * L2 * \cos(\theta5) * \sin(\theta4) + 3 * L4 * \cos(\theta3) * \sin(\theta4) + 6 * L1 * \cos(\theta2) * \cos(\theta5) * \sin(\theta4) + 6 * L3 * \cos(\theta3) * \cos(\theta5) * \sin(\theta4) + L4 * \cos(\theta3) * \cos(\theta6) * \sin(\theta4) + 6 * L1 * \cos(\theta3) * \sin(\theta2) * \sin(\theta5) - L4 * \sin(\theta3) * \sin(\theta5) * \sin(\theta6) + L4 * \cos(\theta3) * \cos(\theta4) * \cos(\theta5) * \sin(\theta6) + 6 * L1 * \cos(\theta4) * \cos(\theta5) * \sin(\theta2) * \sin(\theta3))) / 12 \quad (58)$$

$$M_{52} = -(L4 * m4 * (6 * L2 * \cos(\theta5) * \sin(\theta4) + 3 * L4 * \cos(\theta3) * \sin(\theta4) + 6 * L3 * \cos(\theta3) * \cos(\theta5) * \sin(\theta4) + L4 * \cos(\theta3) * \cos(\theta6) * \sin(\theta4) - L4 * \sin(\theta3) * \sin(\theta5) * \sin(\theta6) + L4 * \cos(\theta3) * \cos(\theta4) * \cos(\theta5) * \sin(\theta6))) / 12 \quad (59)$$

$$M_{53} = (L4 * m4 * (3 * L4 * \cos(\theta4) + L4 * \cos(\theta6) + 6 * L3 * \cos(\theta4) * \cos(\theta5))) / 12 \quad (60)$$

$$M_{54} = (L4^2 * m4 * \sin(\theta5) * \sin(\theta6)) / 12 \quad (61)$$

$$M_{55} = (L4^2 * m4) / 3 \quad (62)$$

$$M_{56} = 0 \quad (63)$$

$$M_{61} = 0 \quad (64)$$

$$M_{62} = 0 \quad (65)$$

$$M_{63} = 0 \quad (66)$$

$$M_{64} = 0 \quad (67)$$

$$M_{65} = 0 \quad (68)$$

$$M_{66} = 0 \quad (69)$$

$$f = \begin{cases} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{cases} \quad (70)$$

$$f_1 = \quad (71)$$

$$\begin{aligned} & L3^2 * dtheta3^2 * m3 * sin(theta3) * sin(theta4)) / 12 \quad + \quad) \\ & (L4^2 * dtheta3^2 * m4 * sin(theta3) * sin(theta4)) / 12 \quad - \\ & (L1 * L2 * dtheta2^2 * m2 * sin(theta2)) / 2 \quad - \quad L1 * L2 * dtheta2^2 * m3 * sin(theta2) \quad - \\ & L1 * L2 * dtheta2^2 * m4 * sin(theta2) + (7 * L4^2 * dtheta3 * dtheta4 * m4 * cos(theta3)) / 12 \\ & - \quad (2 * L3^2 * dtheta1 * dtheta3 * m3 * cos(theta3) * sin(theta3)) / 3 \quad - \\ & (2 * L3^2 * dtheta2 * dtheta3 * m3 * cos(theta3) * sin(theta3)) / 3 \quad - \\ & 2 * L3^2 * dtheta1 * dtheta3 * m4 * cos(theta3) * sin(theta3) \quad - \\ & 2 * L3^2 * dtheta2 * dtheta3 * m4 * cos(theta3) * sin(theta3) \quad + \\ & (2 * L4^2 * dtheta1 * dtheta5 * m4 * cos(theta5) * sin(theta5)) / 3 \quad + \\ & (2 * L4^2 * dtheta2 * dtheta5 * m4 * cos(theta5) * sin(theta5)) / 3 \quad + \\ & (L4^2 * dtheta3 * dtheta5 * m4 * sin(theta3) * sin(theta4)) / 2 \quad - \\ & L1 * L2 * dtheta1 * dtheta2 * m2 * sin(theta2) \quad - \\ & 2 * L1 * L2 * dtheta1 * dtheta2 * m3 * sin(theta2) \quad - \\ & 2 * L1 * L2 * dtheta1 * dtheta2 * m4 * sin(theta2) \quad - \\ & L2 * L3 * dtheta1 * dtheta3 * m3 * sin(theta3) - L2 * L3 * dtheta2 * dtheta3 * m3 * sin(theta3) \\ & - \quad 2 * L2 * L3 * dtheta1 * dtheta3 * m4 * sin(theta3) \quad - \\ & 2 * L2 * L3 * dtheta2 * dtheta3 * m4 * sin(theta3) \quad - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (L4^2*dtheta3*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta4)^2)/2 & - \\
& (7*L4^2*dtheta3*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta5)^2)/12 & + \\
& (L4^2*dtheta3^2*m4*cos(theta4)*sin(theta3)*sin(theta4))/4 & + \\
& (L4^2*dtheta5^2*m4*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta6))/12 & - \\
& (L1*L3*dtheta2^2*m3*cos(theta3)*sin(theta2))/2 & - \\
& (L1*L3*dtheta3^2*m3*cos(theta3)*sin(theta2))/2 & - \\
& L1*L3*dtheta2^2*m4*cos(theta3)*sin(theta2) & - \\
& L1*L3*dtheta3^2*m4*cos(theta3)*sin(theta2) & - \\
& (L3^2*dtheta3*dtheta4*m3*cos(theta3)*cos(theta4))/12 & - \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta4))/12 & + \\
& (L4^2*dtheta4*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta4))/12 & + \\
& (L2*L4*dtheta4^2*m4*sin(theta4)*sin(theta5))/2 & + \\
& (L2*L4*dtheta5^2*m4*sin(theta4)*sin(theta5))/2 & - \\
& (L4^2*dtheta3^2*m4*cos(theta4)*cos(theta5)^2*sin(theta3)*sin(theta4))/4 & - \\
& (2*L4^2*dtheta4*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)^2)/3 & + \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta3)*cos(theta4)^2*sin(theta3))/3 & - \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta3)*cos(theta5)^2*sin(theta3))/3 & + \\
& (2*L4^2*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta3)*cos(theta4)^2*sin(theta3))/3 & + \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta4*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)*sin(theta4))/3 & - \\
& (2*L4^2*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta3)*cos(theta5)^2*sin(theta3))/3 & + \\
& (2*L4^2*dtheta2*dtheta4*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)*sin(theta4))/3 & - \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta3)^2*cos(theta5)*sin(theta5))/3 & - \\
& (2*L4^2*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta3)^2*cos(theta5)*sin(theta5))/3 & - \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta5*m4*cos(theta5)^2*sin(theta3)*sin(theta4))/2 & - \\
& L3*L4*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta3)^2*sin(theta5) & - \\
& L3*L4*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta3)^2*sin(theta5) & + \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta4)^2*cos(theta5)^2)/2 & - \\
& (L4^2*dtheta3^2*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta4)*sin(theta5))/4 & + \\
& (L4^2*dtheta4^2*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta4)*sin(theta5))/3 & + \\
& (L4^2*dtheta5^2*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*sin(theta5)*sin(theta6))/12 & - \\
& (L1*L4*dtheta2^2*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta2))/2 & - \\
& (L1*L4*dtheta3^2*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta2))/2 & - \\
& (L1*L4*dtheta5^2*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta2))/2 & - \\
& (L4^2*dtheta4*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta6))/12 & + \\
& (L1*L4*dtheta2^2*m4*cos(theta2)*sin(theta4)*sin(theta5))/2 & + \\
& (L1*L4*dtheta4^2*m4*cos(theta2)*sin(theta4)*sin(theta5))/2 & + \\
& (L1*L4*dtheta5^2*m4*cos(theta2)*sin(theta4)*sin(theta5))/2 & - \\
& (L3*L4*dtheta3^2*m4*cos(theta3)*sin(theta4)*sin(theta5))/2 & + \\
& (L3*L4*dtheta4^2*m4*cos(theta3)*sin(theta4)*sin(theta5))/2 & +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (L3*L4*d\theta_5^2*m4*\cos(\theta_3)*\sin(\theta_4)*\sin(\theta_5))/2 & + \\
& (2*L4^2*d\theta_1*d\theta_5*m4*\cos(\theta_3)*\cos(\theta_4)*\sin(\theta_3))/3 & + \\
& (2*L4^2*d\theta_2*d\theta_5*m4*\cos(\theta_3)*\cos(\theta_4)*\sin(\theta_3))/3 & + \\
& (2*L4^2*d\theta_1*d\theta_3*m4*\cos(\theta_4)*\cos(\theta_5)*\sin(\theta_5))/3 & + \\
& (2*L4^2*d\theta_2*d\theta_3*m4*\cos(\theta_4)*\cos(\theta_5)*\sin(\theta_5))/3 & - \\
& L2*L4*d\theta_4*d\theta_5*m4*\cos(\theta_4)*\cos(\theta_5) & + \\
& (L4^2*d\theta_3*d\theta_5*m4*\cos(\theta_6)*\sin(\theta_3)*\sin(\theta_4))/12 & + \\
& (L4^2*d\theta_3*d\theta_5*m4*\cos(\theta_3)*\sin(\theta_5)*\sin(\theta_6))/12 & + \\
& (2*L4^2*d\theta_4*d\theta_5*m4*\cos(\theta_5)*\sin(\theta_3)*\sin(\theta_5))/3 & + \\
& (L4^2*d\theta_5*d\theta_6*m4*\cos(\theta_3)*\sin(\theta_4)*\sin(\theta_6))/12 & + \\
& (L4^2*d\theta_5*d\theta_6*m4*\cos(\theta_6)*\sin(\theta_3)*\sin(\theta_5))/12 & - \\
& L1*L3*d\theta_1*d\theta_2*m3*\cos(\theta_3)*\sin(\theta_2) & - \\
& L1*L3*d\theta_1*d\theta_3*m3*\cos(\theta_2)*\sin(\theta_3) & - \\
& L1*L3*d\theta_2*d\theta_3*m3*\cos(\theta_2)*\sin(\theta_3) & - \\
& 2*L1*L3*d\theta_1*d\theta_2*m4*\cos(\theta_3)*\sin(\theta_2) & - \\
& 2*L1*L3*d\theta_1*d\theta_3*m4*\cos(\theta_2)*\sin(\theta_3) & - \\
& 2*L1*L3*d\theta_2*d\theta_3*m4*\cos(\theta_2)*\sin(\theta_3) & - \\
& L2*L4*d\theta_1*d\theta_3*m4*\cos(\theta_5)*\sin(\theta_3) & - \\
& L2*L4*d\theta_2*d\theta_3*m4*\cos(\theta_5)*\sin(\theta_3) & - \\
& L2*L4*d\theta_1*d\theta_5*m4*\cos(\theta_3)*\sin(\theta_5) & - \\
& L2*L4*d\theta_2*d\theta_5*m4*\cos(\theta_3)*\sin(\theta_5) & + \\
& L3*L4*d\theta_1*d\theta_3*m4*\cos(\theta_4)*\sin(\theta_5) & + \\
& L3*L4*d\theta_2*d\theta_3*m4*\cos(\theta_4)*\sin(\theta_5) & - \\
& (4*L4^2*d\theta_1*d\theta_3*m4*\cos(\theta_3)^2*\cos(\theta_4)*\cos(\theta_5)*\sin(\theta_5))/ & \\
& 3 & - \\
& (4*L4^2*d\theta_1*d\theta_5*m4*\cos(\theta_3)*\cos(\theta_4)*\cos(\theta_5)^2*\sin(\theta_3))/ & \\
& 3 & - \\
& (4*L4^2*d\theta_2*d\theta_3*m4*\cos(\theta_3)^2*\cos(\theta_4)*\cos(\theta_5)*\sin(\theta_5))/ & \\
& 3 & - \\
& (4*L4^2*d\theta_2*d\theta_5*m4*\cos(\theta_3)*\cos(\theta_4)*\cos(\theta_5)^2*\sin(\theta_3))/ & \\
& 3 & - \\
& 2*L3*L4*d\theta_1*d\theta_3*m4*\cos(\theta_3)^2*\cos(\theta_4)*\sin(\theta_5) & - \\
& 2*L3*L4*d\theta_2*d\theta_3*m4*\cos(\theta_3)^2*\cos(\theta_4)*\sin(\theta_5) & - \\
& (2*L4^2*d\theta_1*d\theta_3*m4*\cos(\theta_3)*\cos(\theta_4)^2*\cos(\theta_5)^2*\sin(\theta_3 & \\
&))/3 & - \\
& (2*L4^2*d\theta_2*d\theta_3*m4*\cos(\theta_3)*\cos(\theta_4)^2*\cos(\theta_5)^2*\sin(\theta_3 & \\
&))/3 & - \\
& (2*L4^2*d\theta_1*d\theta_4*m4*\cos(\theta_3)^2*\cos(\theta_4)*\cos(\theta_5)^2*\sin(\theta_4 & \\
&))/3 & - \\
& (2*L4^2*d\theta_2*d\theta_4*m4*\cos(\theta_3)^2*\cos(\theta_4)*\cos(\theta_5)^2*\sin(\theta_4 &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&))/3 & - \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)^2*cos(theta5)*sin(theta5) & - \\
&))/3 & - \\
& (2*L4^2*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)^2*cos(theta5)*sin(theta5) & - \\
&))/3 & - \\
& (L4^2*dtheta5*dtheta6*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)*cos(theta6))/12 & - \\
& L1*L4*dtheta4*dtheta5*m4*cos(theta2)*cos(theta4)*cos(theta5) & - \\
& L3*L4*dtheta4*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5) & + \\
& (L1*L4*dtheta2^2*m4*cos(theta4)*sin(theta2)*sin(theta3)*sin(theta5))/2 & + \\
& (L1*L4*dtheta3^2*m4*cos(theta4)*sin(theta2)*sin(theta3)*sin(theta5))/2 & + \\
& (L1*L4*dtheta4^2*m4*cos(theta4)*sin(theta2)*sin(theta3)*sin(theta5))/2 & + \\
& (L1*L4*dtheta5^2*m4*cos(theta4)*sin(theta2)*sin(theta3)*sin(theta5))/2 & + \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta4*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta5))/12 & + \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta5*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta6))/12 & + \\
& (L4^2*dtheta4*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta4)*sin(theta6))/12 & - \\
& L1*L4*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta2) & - \\
& L1*L4*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta2)*cos(theta5)*sin(theta3) & - \\
& L1*L4*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta2)*cos(theta5)*sin(theta3) & - \\
& L1*L4*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta2)*cos(theta3)*sin(theta5) & - \\
& L1*L4*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta2)*cos(theta3)*sin(theta5) & - \\
& L2*L4*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*sin(theta5) & - \\
& L2*L4*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*sin(theta5) & - \\
& L2*L4*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3) & - \\
& L2*L4*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3) & - \\
& 2*L3*L4*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta3) & - \\
& 2*L3*L4*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta3) & + \\
& L1*L4*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta2)*sin(theta4)*sin(theta5) & + \\
& L1*L4*dtheta1*dtheta4*m4*cos(theta4)*sin(theta2)*sin(theta5) & + \\
& L1*L4*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta5)*sin(theta2)*sin(theta4) & + \\
& L1*L4*dtheta2*dtheta4*m4*cos(theta4)*sin(theta2)*sin(theta5) & + \\
& L1*L4*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta5)*sin(theta2)*sin(theta4) & + \\
& L1*L4*dtheta3*dtheta5*m4*sin(theta2)*sin(theta3)*sin(theta5) & + \\
& L2*L4*dtheta1*dtheta4*m4*sin(theta3)*sin(theta4)*sin(theta5) & + \\
& L2*L4*dtheta2*dtheta4*m4*sin(theta3)*sin(theta4)*sin(theta5) & - \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta4)*sin(theta5))/2 & - \\
& L1*L4*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta2)*cos(theta3)*cos(theta4)*sin(theta5) & - \\
& L1*L4*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta2)*cos(theta3)*cos(theta4)*sin(theta5) & - \\
& L1*L4*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta2)*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3) & -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L1*L4*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta2)*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3) & - \\
& L1*L4*dtheta3*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta2) & - \\
& L3*L4*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3) & - \\
& L3*L4*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3) & + \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta4)*sin(theta5))/3 & + \\
& (2*L4^2*dtheta2*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta4)*sin(theta5))/3 & + \\
& L1*L4*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta4)*sin(theta2)*sin(theta3)*sin(theta5) & + \\
& L1*L4*dtheta1*dtheta4*m4*cos(theta2)*sin(theta3)*sin(theta4)*sin(theta5) & + \\
& L1*L4*dtheta2*dtheta4*m4*cos(theta2)*sin(theta3)*sin(theta4)*sin(theta5) & + \\
& L1*L4*dtheta3*dtheta4*m4*cos(theta3)*sin(theta2)*sin(theta4)*sin(theta5) & + \\
& L1*L4*dtheta4*dtheta5*m4*cos(theta5)*sin(theta2)*sin(theta3)*sin(theta4) & + \\
& L3*L4*dtheta1*dtheta4*m4*cos(theta3)*sin(theta3)*sin(theta4)*sin(theta5) & + \\
& (L3*L4*dtheta2*dtheta4*m4*cos(theta3)*sin(theta3)*sin(theta4)*sin(theta5) &
\end{aligned}$$

$$f_2 = \tag{v\gamma}$$

$$\begin{aligned}
& L3^2*dtheta3^2*m3*sin(theta3)*sin(theta4))/12 & + &) \\
& (L4^2*dtheta3^2*m4*sin(theta3)*sin(theta4))/12 & + & \\
& (L1*L2*dtheta1^2*m2*sin(theta2))/2 + L1*L2*dtheta1^2*m3*sin(theta2) & + & \\
& L1*L2*dtheta1^2*m4*sin(theta2) + (7*L4^2*dtheta3*dtheta4*m4*cos(theta3))/12 & + & \\
& - (2*L3^2*dtheta1*dtheta3*m3*cos(theta3)*sin(theta3))/3 & - & \\
& (2*L3^2*dtheta2*dtheta3*m3*cos(theta3)*sin(theta3))/3 & - & \\
& 2*L3^2*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta3)*sin(theta3) & - & \\
& 2*L3^2*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta3)*sin(theta3) & + & \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta5)*sin(theta5))/3 & + & \\
& (2*L4^2*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta5)*sin(theta5))/3 & + & \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta5*m4*sin(theta3)*sin(theta4))/2 & - & \\
& L2*L3*dtheta1*dtheta3*m3*sin(theta3) - L2*L3*dtheta2*dtheta3*m3*sin(theta3) & - & \\
& - 2*L2*L3*dtheta1*dtheta3*m4*sin(theta3) & - & \\
& 2*L2*L3*dtheta2*dtheta3*m4*sin(theta3) & - & \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta4)^2)/2 & - & \\
& (7*L4^2*dtheta3*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta5)^2)/12 & + & \\
& (L4^2*dtheta3^2*m4*cos(theta4)*sin(theta3)*sin(theta4))/4 & + & \\
& (L4^2*dtheta5^2*m4*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta6))/12 & + & \\
& (L1*L3*dtheta1^2*m3*cos(theta3)*sin(theta2))/2 & + & \\
& L1*L3*dtheta1^2*m4*cos(theta3)*sin(theta2) & - &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (L3^2*dtheta3*dtheta4*m3*cos(theta3)*cos(theta4))/12 & - \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta4))/12 & + \\
& (L4^2*dtheta4*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta4))/12 & + \\
& (L2*L4*dtheta4^2*m4*sin(theta4)*sin(theta5))/2 & + \\
& (L2*L4*dtheta5^2*m4*sin(theta4)*sin(theta5))/2 & - \\
& (L4^2*dtheta3^2*m4*cos(theta4)*cos(theta5)^2*sin(theta3)*sin(theta4))/4 & - \\
& (2*L4^2*dtheta4*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)^2)/3 & + \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta3)*cos(theta4)^2*sin(theta3))/3 & - \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta3)*cos(theta5)^2*sin(theta3))/3 & + \\
& (2*L4^2*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta3)*cos(theta4)^2*sin(theta3))/3 & + \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta4*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)*sin(theta4))/3 & - \\
& (2*L4^2*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta3)*cos(theta5)^2*sin(theta3))/3 & + \\
& (2*L4^2*dtheta2*dtheta4*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)*sin(theta4))/3 & - \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta3)^2*cos(theta5)*sin(theta5))/3 & - \\
& (2*L4^2*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta3)^2*cos(theta5)*sin(theta5))/3 & - \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta5*m4*cos(theta5)^2*sin(theta3)*sin(theta4))/2 & - \\
& L3*L4*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta3)^2*sin(theta5) & - \\
& L3*L4*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta3)^2*sin(theta5) & + \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta4)^2*cos(theta5)^2)/2 & - \\
& (L4^2*dtheta3^2*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta4)*sin(theta5))/4 & + \\
& (L4^2*dtheta4^2*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta4)*sin(theta5))/3 & + \\
& (L4^2*dtheta5^2*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*sin(theta5)*sin(theta6))/12 & + \\
& (L1*L4*dtheta1^2*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta2))/2 & - \\
& (L4^2*dtheta4*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta6))/12 & - \\
& (L1*L4*dtheta1^2*m4*cos(theta2)*sin(theta4)*sin(theta5))/2 & - \\
& (L3*L4*dtheta3^2*m4*cos(theta3)*sin(theta4)*sin(theta5))/2 & + \\
& (L3*L4*dtheta4^2*m4*cos(theta3)*sin(theta4)*sin(theta5))/2 & + \\
& (L3*L4*dtheta5^2*m4*cos(theta3)*sin(theta4)*sin(theta5))/2 & + \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*sin(theta3))/3 & + \\
& (2*L4^2*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*sin(theta3))/3 & + \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta5))/3 & + \\
& (2*L4^2*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta5))/3 & - \\
& L2*L4*dtheta4*dtheta5*m4*cos(theta4)*cos(theta5) & + \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta5*m4*cos(theta6)*sin(theta3)*sin(theta4))/12 & + \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta5*m4*cos(theta3)*sin(theta5)*sin(theta6))/12 & + \\
& (2*L4^2*dtheta4*dtheta5*m4*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta5))/3 & + \\
& (L4^2*dtheta5*dtheta6*m4*cos(theta3)*sin(theta4)*sin(theta6))/12 & + \\
& (L4^2*dtheta5*dtheta6*m4*cos(theta6)*sin(theta3)*sin(theta5))/12 & - \\
& L2*L4*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta5)*sin(theta3) & -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L2*L4*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta5)*sin(theta3) & - \\
& L2*L4*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta3)*sin(theta5) & - \\
& L2*L4*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta3)*sin(theta5) & + \\
& L3*L4*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta4)*sin(theta5) & + \\
& L3*L4*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta4)*sin(theta5) & - \\
& (4*L4^2*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta5))/ & - \\
& 3 & - \\
& (4*L4^2*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)^2*sin(theta3))/ & - \\
& 3 & - \\
& (4*L4^2*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta5))/ & - \\
& 3 & - \\
& (4*L4^2*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)^2*sin(theta3))/ & - \\
& 3 & - \\
& 2*L3*L4*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)*sin(theta5) & - \\
& 2*L3*L4*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)*sin(theta5) & - \\
& ((2*L4^2*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta3)*cos(theta4)^2*cos(theta5)^2*sin(theta3) & - \\
&))/3 & - \\
& (2*L4^2*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta3)*cos(theta4)^2*cos(theta5)^2*sin(theta3) & - \\
&))/3 & - \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta4*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)*cos(theta5)^2*sin(theta4) & - \\
&))/3 & - \\
& (2*L4^2*dtheta2*dtheta4*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)*cos(theta5)^2*sin(theta4) & - \\
&))/3 & - \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)^2*cos(theta5)*sin(theta5) & - \\
&))/3 & - \\
& (2*L4^2*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)^2*cos(theta5)*sin(theta5) & - \\
&))/3 & - \\
& (L4^2*dtheta5*dtheta6*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)*cos(theta6))/12 & - \\
& L3*L4*dtheta4*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5) & - \\
& (L1*L4*dtheta1^2*m4*cos(theta4)*sin(theta2)*sin(theta3)*sin(theta5))/2 & + \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta4*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta5))/12 & + \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta5*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta6))/12 & + \\
& (L4^2*dtheta4*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta4)*sin(theta6))/12 & - \\
& L2*L4*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*sin(theta5) & - \\
& L2*L4*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*sin(theta5) & - \\
& L2*L4*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3) & - \\
& L2*L4*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3) & - \\
& 2*L3*L4*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta3) & - \\
& 2*L3*L4*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta3) & + \\
& L2*L4*dtheta1*dtheta4*m4*sin(theta3)*sin(theta4)*sin(theta5) & +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L2*L4*dtheta2*dtheta4*m4*\sin(theta3)*\sin(theta4)*\sin(theta5) & - \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta5*m4*\cos(theta3)*\cos(theta4)*\cos(theta5)*\sin(theta4)*\sin(theta5))/2 & - \\
& L3*L4*dtheta1*dtheta5*m4*\cos(theta3)*\cos(theta4)*\cos(theta5)*\sin(theta3) & - \\
& L3*L4*dtheta2*dtheta5*m4*\cos(theta3)*\cos(theta4)*\cos(theta5)*\sin(theta3) & + \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta4*m4*\cos(theta3)*\cos(theta5)*\sin(theta3)*\sin(theta4)*\sin(theta5))/3 & + \\
& (2*L4^2*dtheta2*dtheta4*m4*\cos(theta3)*\cos(theta5)*\sin(theta3)*\sin(theta4)*\sin(theta5))/3 & + \\
& L3*L4*dtheta1*dtheta4*m4*\cos(theta3)*\sin(theta3)*\sin(theta4)*\sin(theta5) & + \\
& (L3*L4*dtheta2*dtheta4*m4*\cos(theta3)*\sin(theta3)*\sin(theta4)*\sin(theta5) &
\end{aligned}$$

$$f_3 = \tag{v^*}$$

$$\begin{aligned}
& L3*g*m3*\cos(theta3))/2 + L3*g*m4*\cos(theta3) + L3*L4*ddtheta3*m4 +) \\
& (L2*L3*dtheta1^2*m3*\sin(theta3))/2 + (L2*L3*dtheta2^2*m3*\sin(theta3))/2 + \\
& L2*L3*dtheta1^2*m4*\sin(theta3) + L2*L3*dtheta2^2*m4*\sin(theta3) & - \\
& (L4^2*dtheta1*dtheta4*m4*\cos(theta3))/12 & - \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta4*m4*\cos(theta3))/12 & - \\
& (L4^2*dtheta5*dtheta6*m4*\sin(theta6))/12 & + \\
& (L4*g*m4*\cos(theta3)*\cos(theta5))/2 - 2*L3*L4*ddtheta3*m4*\cos(theta5/2)^2 + \\
& L3*L4*ddtheta3*m4*\cos(theta5) & + \\
& (L3^2*dtheta1^2*m3*\cos(theta3)*\sin(theta3))/3 & + \\
& (L3^2*dtheta2^2*m3*\cos(theta3)*\sin(theta3))/3 & + \\
& L3^2*dtheta1^2*m4*\cos(theta3)*\sin(theta3) & + \\
& L3^2*dtheta2^2*m4*\cos(theta3)*\sin(theta3) & + \\
& (2*L3^2*dtheta1*dtheta2*m3*\cos(theta3)*\sin(theta3))/3 & + \\
& 2*L3^2*dtheta1*dtheta2*m4*\cos(theta3)*\sin(theta3) & - \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta4*m4*\cos(theta4)*\sin(theta4))/2 & - \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta5*m4*\cos(theta5)*\sin(theta5))/2 & + \\
& L2*L3*dtheta1*dtheta2*m3*\sin(theta3) & + \\
& 2*L2*L3*dtheta1*dtheta2*m4*\sin(theta3) & - \\
& L3*L4*dtheta3*dtheta5*m4*\sin(theta5) & - \\
& (L4*g*m4*\cos(theta4)*\sin(theta3)*\sin(theta5))/2 & - \\
& (L4^2*dtheta1^2*m4*\cos(theta3)*\cos(theta4)^2*\sin(theta3))/3 & + \\
& (L4^2*dtheta1^2*m4*\cos(theta3)*\cos(theta5)^2*\sin(theta3))/3 & - \\
& (L4^2*dtheta2^2*m4*\cos(theta3)*\cos(theta4)^2*\sin(theta3))/3 & + \\
& (L4^2*dtheta2^2*m4*\cos(theta3)*\cos(theta5)^2*\sin(theta3))/3 & -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (L4^2*dtheta1*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta4)^2)/2 & + \\
& (L4^2*dtheta1*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta5)^2)/12 & - \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta4)^2)/2 & + \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta5)^2)/12 & - \\
& (L4^2*dtheta4*dtheta5*m4*cos(theta5)^2*sin(theta4))/2 & - \\
& (L4^2*dtheta1^2*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta5))/3 & - \\
& (L4^2*dtheta2^2*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta5))/3 & - \\
& (L4^2*dtheta4^2*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta5))/4 & + \\
& (L1*L3*dtheta1^2*m3*cos(theta2)*sin(theta3))/2 & + \\
& L1*L3*dtheta1^2*m4*cos(theta2)*sin(theta3) & + \\
& (L2*L4*dtheta1^2*m4*cos(theta5)*sin(theta3))/2 & + \\
& (L2*L4*dtheta2^2*m4*cos(theta5)*sin(theta3))/2 & - \\
& (L3*L4*dtheta1^2*m4*cos(theta4)*sin(theta5))/2 & - \\
& (L3*L4*dtheta2^2*m4*cos(theta4)*sin(theta5))/2 & - \\
& (L3*L4*dtheta4^2*m4*cos(theta4)*sin(theta5))/2 & - \\
& (L3*L4*dtheta5^2*m4*cos(theta4)*sin(theta5))/2 & - \\
& (L3^2*dtheta1*dtheta4*m3*cos(theta3)*cos(theta4))/12 & - \\
& (L3^2*dtheta2*dtheta4*m3*cos(theta3)*cos(theta4))/12 & - \\
& (L4^2*dtheta1*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta4))/12 & - \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta4))/12 & + \\
& (2*L4^2*dtheta1^2*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta5))/3 & + \\
& (2*L4^2*dtheta2^2*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta5))/3 & + \\
& L3*L4*dtheta1^2*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)*sin(theta5) & + \\
& L3*L4*dtheta2^2*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)*sin(theta5) & - \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta3)*cos(theta4)^2*sin(theta3))/3 & + \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta3)*cos(theta5)^2*sin(theta3))/3 & + \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta4*m4*cos(theta4)*cos(theta5)^2*sin(theta4))/2 & + \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta5*m4*cos(theta4)^2*cos(theta5)*sin(theta5))/2 & - \\
& (L4^2*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta5)^2*sin(theta3)*sin(theta4))/2 & - \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta5)^2*sin(theta3)*sin(theta4))/2 & + \\
& (L4^2*dtheta1^2*m4*cos(theta3)*cos(theta4)^2*cos(theta5)^2*sin(theta3))/3 & + \\
& (L4^2*dtheta2^2*m4*cos(theta3)*cos(theta4)^2*cos(theta5)^2*sin(theta3))/3 & + \\
& (L4^2*dtheta1*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta4)^2*cos(theta5)^2)/2 & + \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta4)^2*cos(theta5)^2)/2 & + \\
& (L1*L4*dtheta1^2*m4*cos(theta2)*cos(theta5)*sin(theta3))/2 & + \\
& (L2*L4*dtheta1^2*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*sin(theta5))/2 & + \\
& (L2*L4*dtheta2^2*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*sin(theta5))/2 & + \\
& L3*L4*dtheta1^2*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta3) & + \\
& L3*L4*dtheta2^2*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta3) & -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta5))/3 & - \\
& (L4^2*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta6)*sin(theta3)*sin(theta4))/12 & - \\
& (L4^2*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta3)*sin(theta5)*sin(theta6))/12 & - \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta6)*sin(theta3)*sin(theta4))/12 & - \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta3)*sin(theta5)*sin(theta6))/12 & + \\
& L2*L4*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta5)*sin(theta3) & - \\
& L3*L4*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta4)*sin(theta5) & - \\
& L3*L4*dtheta4*dtheta5*m4*cos(theta5)*sin(theta4) & + \\
& (4*L4^2*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta5))/ & \\
& 3 + 2*L3*L4*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)*sin(theta5) & + \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta3)*cos(theta4)^2*cos(theta5)^2*sin(theta3 & \\
&))/3 + (L1*L4*dtheta1^2*m4*cos(theta2)*cos(theta3)*cos(theta4)*sin(theta5))/2 & - \\
& (7*L4^2*dtheta1*dtheta4*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta5))/12 & - \\
& & - \\
& (7*L4^2*dtheta2*dtheta4*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta5))/12 & \\
& - (L4^2*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta6))/12 & - \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta6))/12 & + \\
& L2*L4*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*sin(theta5) & + \\
& 2*L3*L4*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta3) & - \\
& L3*L4*dtheta1*dtheta4*m4*cos(theta4)*sin(theta3)*sin(theta5) & - \\
& L3*L4*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta4) & - \\
& L3*L4*dtheta2*dtheta4*m4*cos(theta4)*sin(theta3)*sin(theta5) & - \\
& L3*L4*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta4) & - \\
& (L4^2*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta4)*sin(th & \\
& eta5))/2 & - \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta4)*sin(th & \\
& eta5))/2 &
\end{aligned}$$

$$f_4 = \tag{v\text{f}}$$

$$\begin{aligned}
& L4^2*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta3))/12 & + &) \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta3))/12 & + & \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta5*m4*sin(theta4))/2 & + & \\
& (L4^2*dtheta3^2*m4*cos(theta4)*sin(theta4))/4 & + & \\
& (L4^2*dtheta5^2*m4*cos(theta5)*sin(theta6))/12 & + & \\
& (2*L4^2*dtheta4*dtheta5*m4*cos(theta5)*sin(theta5))/3 & + &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \\
& (7*L4^2*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta5))/12 \\
& - (L4^2*dtheta1*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta4)*sin(theta6))/12 - \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta5*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta4)*sin(theta6))/12 + \\
& L3*L4*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta4)*sin(theta3)*sin(theta5) + \\
& L3*L4*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta4)*sin(theta3)*sin(theta5) - \\
& L2*L4*dtheta1*dtheta2*m4*sin(theta3)*sin(theta4)*sin(theta5) - \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta4)*sin(theta5))/3 - \\
& (L3*L4*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta3)*sin(theta3)*sin(theta4)*sin(theta5)
\end{aligned}$$

$$f_5 = \tag{۷۵}$$

$$\begin{aligned}
& L3*L4*dtheta3^2*m4*sin(theta5))/2 - (L4^2*dtheta3*dtheta4*m4*sin(theta4))/2 -) \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta6*m4*sin(theta6))/12 - (L4*g*m4*sin(theta3)*sin(theta5))/2 \\
& - (L4^2*dtheta1^2*m4*cos(theta5)*sin(theta5))/3 - \\
& (L4^2*dtheta2^2*m4*cos(theta5)*sin(theta5))/3 + \\
& (L4^2*dtheta3^2*m4*cos(theta5)*sin(theta5))/4 - \\
& (L4^2*dtheta4^2*m4*cos(theta5)*sin(theta5))/3 - \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta5)*sin(theta5))/3 + \\
& (L4^2*dtheta4*dtheta6*m4*cos(theta6)*sin(theta5))/12 + \\
& (L4*g*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5))/2 + \\
& (L4^2*dtheta1^2*m4*cos(theta3)^2*cos(theta5)*sin(theta5))/3 + \\
& (L4^2*dtheta2^2*m4*cos(theta3)^2*cos(theta5)*sin(theta5))/3 - \\
& (L4^2*dtheta3^2*m4*cos(theta4)^2*cos(theta5)*sin(theta5))/4 + \\
& (L3*L4*dtheta1^2*m4*cos(theta3)^2*sin(theta5))/2 + \\
& (L3*L4*dtheta2^2*m4*cos(theta3)^2*sin(theta5))/2 + \\
& (L4^2*dtheta3*dtheta4*m4*cos(theta5)^2*sin(theta4))/2 - \\
& (L4^2*dtheta1^2*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*sin(theta3))/3 - \\
& (L4^2*dtheta2^2*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*sin(theta3))/3 + \\
& (L2*L4*dtheta1^2*m4*cos(theta3)*sin(theta5))/2 + \\
& (L2*L4*dtheta2^2*m4*cos(theta3)*sin(theta5))/2 - \\
& (7*L4^2*dtheta1*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta4))/12 - \\
& (7*L4^2*dtheta2*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta4))/12 + \\
& (2*L4^2*dtheta1^2*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)^2*sin(theta3))/3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2*L4^2*dtheta2^2*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)^2*sin(theta3))/3 & + \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)^2)/3 & + \\
& (2*L4^2*dtheta2*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)^2)/3 & + \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta3)^2*cos(theta5)*sin(theta5))/3 & + \\
& (L4^2*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta5)^2*sin(theta3)*sin(theta4))/2 & + \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta5)^2*sin(theta3)*sin(theta4))/2 & + \\
& L3*L4*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta3)^2*sin(theta5) & + \\
& (L4^2*dtheta1^2*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)^2*cos(theta5)*sin(theta5))/3 & + \\
& (L4^2*dtheta2^2*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)^2*cos(theta5)*sin(theta5))/3 & + \\
& (L1*L4*dtheta1^2*m4*cos(theta2)*cos(theta3)*sin(theta5))/2 & + \\
& (L2*L4*dtheta1^2*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3))/2 & + \\
& (L2*L4*dtheta2^2*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3))/2 & - \\
& (L4^2*dtheta1*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta6))/12 & - \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta6))/12 & - \\
& (L1*L4*dtheta1^2*m4*cos(theta5)*sin(theta2)*sin(theta4))/2 & - \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*sin(theta3))/3 & + \\
& (L4^2*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta6)*sin(theta3)*sin(theta4))/12 & + \\
& (L4^2*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta3)*sin(theta5)*sin(theta6))/12 & - \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta4*m4*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta5))/3 & + \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta6)*sin(theta3)*sin(theta4))/12 & + \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta3)*sin(theta5)*sin(theta6))/12 & - \\
& (2*L4^2*dtheta2*dtheta4*m4*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta5))/3 & + \\
& (L4^2*dtheta1*dtheta6*m4*cos(theta3)*sin(theta4)*sin(theta6))/12 & + \\
& (L4^2*dtheta1*dtheta6*m4*cos(theta6)*sin(theta3)*sin(theta5))/12 & + \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta6*m4*cos(theta3)*sin(theta4)*sin(theta6))/12 & + \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta6*m4*cos(theta6)*sin(theta3)*sin(theta5))/12 & + \\
& L2*L4*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta3)*sin(theta5) & + \\
& (4*L4^2*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)^2*sin(theta3))/ & + \\
& 3 & + \\
& (2*L4^2*dtheta1*dtheta2*m4*cos(theta3)^2*cos(theta4)^2*cos(theta5)*sin(theta5) & + \\
&))/3 + (L1*L4*dtheta1^2*m4*cos(theta2)*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3))/2 & + \\
& (L3*L4*dtheta1^2*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3))/2 & + \\
& (L3*L4*dtheta2^2*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3))/2 & - \\
& (L4^2*dtheta1*dtheta6*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)*cos(theta6))/12 & - \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta6*m4*cos(theta3)*cos(theta4)*cos(theta5)*cos(theta6))/12 & + \\
& (L4^2*dtheta1*dtheta3*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta6))/12 & + \\
& (L4^2*dtheta1*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta4)*sin(theta6))/12 & + \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta3*m4*cos(theta4)*cos(theta5)*sin(theta3)*sin(theta6))/12 & + \\
& (L4^2*dtheta2*dtheta4*m4*cos(theta3)*cos(theta5)*sin(theta4)*sin(theta6))/12 & +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L2*L4*d\theta_1*d\theta_2*m_4*\cos(\theta_4)*\cos(\theta_5)*\sin(\theta_3) & + \\
& L3*L4*d\theta_1*d\theta_3*m_4*\cos(\theta_5)*\sin(\theta_3)*\sin(\theta_4) & + \\
& L3*L4*d\theta_2*d\theta_3*m_4*\cos(\theta_5)*\sin(\theta_3)*\sin(\theta_4) & + \\
& (L4^2*d\theta_1*d\theta_3*m_4*\cos(\theta_3)*\cos(\theta_4)*\cos(\theta_5)*\sin(\theta_4)*\sin(\theta_5))/2 & + \\
& (L4^2*d\theta_2*d\theta_3*m_4*\cos(\theta_3)*\cos(\theta_4)*\cos(\theta_5)*\sin(\theta_4)*\sin(\theta_5))/2 & + \\
& (L3*L4*d\theta_1*d\theta_2*m_4*\cos(\theta_3)*\cos(\theta_4)*\cos(\theta_5)*\sin(\theta_3)
\end{aligned}$$

$$f_6 = \tag{V6}$$

$$\begin{aligned}
& L4^2*d\theta_5*m_4*(d\theta_4*\cos(\theta_6)*\sin(\theta_5) - d\theta_3*\sin(\theta_6) +)- \\
& d\theta_1*\cos(\theta_3)*\sin(\theta_4)*\sin(\theta_6) & + \\
& d\theta_1*\cos(\theta_6)*\sin(\theta_3)*\sin(\theta_5) & + \\
& d\theta_2*\cos(\theta_3)*\sin(\theta_4)*\sin(\theta_6) & + \\
& d\theta_2*\cos(\theta_6)*\sin(\theta_3)*\sin(\theta_5) & - \\
& d\theta_1*\cos(\theta_3)*\cos(\theta_4)*\cos(\theta_5)*\cos(\theta_6) & - \\
& d\theta_2*\cos(\theta_3)*\cos(\theta_4)*\cos(\theta_5)*\cos(\theta_6)))/12
\end{aligned}$$

$$B_1^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\cos(\theta_3)*\sin(\theta_4) \\ \sin(\theta_3) \\ \cos(\theta_3)*\sin(\theta_4)+ \sin(\theta_3)*\sin(\theta_5)*\sin(\theta_6) - \cos(\theta_3) \\ * \cos(\theta_6)*\sin(\theta_4) - \cos(\theta_3)*\cos(\theta_4)*\cos(\theta_5)*\sin(\theta_6) \\ \cos(\theta_5)*\sin(\theta_3) - \sin(\theta_3) + \cos(\theta_3)*\cos(\theta_4)*\sin(\theta_5) \end{bmatrix} \tag{V7}$$

$$B_2^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\cos(\theta_3)*\sin(\theta_4) \\ \sin(\theta_3) \\ \cos(\theta_3)*\sin(\theta_4) + \sin(\theta_3)*\sin(\theta_5)*\sin(\theta_6)- \cos(\theta_3) \\ * \cos(\theta_6)*\sin(\theta_4) - \cos(\theta_3)*\cos(\theta_4)*\cos(\theta_5)*\sin(\theta_6) \\ \cos(\theta_5)*\sin(\theta_3) - \sin(\theta_3) + \cos(\theta_3)*\cos(\theta_4)*\sin(\theta_5) \end{bmatrix} \tag{V8}$$

$$B_3^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cos(\theta_6) - 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$B_4^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \sin(\theta_5) \cdot \sin(\theta_6) \\ \cos(\theta_5) - 1 \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$B_5^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$B_6^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (82)$$

شبیه‌سازی دینامیکی

برای شبیه‌سازی دینامیکی بازوی مکانیکی ماهر، باید از مدار دینامیکی، استفاده کنیم. با داشتن معادله‌های دینامیکی بسته برای شبیه‌سازی باید معادله دینامیکی شتاب را حل کنیم.

$$\ddot{\theta} = M^{-1}(\theta) [\tau - V(\theta, \dot{\theta}) - G(\theta) - F(\theta, \dot{\theta})] \quad (83)$$

سپس می‌توانی هر یک از روش‌های انتگرال‌گیری عددی را برای انتگرال گرفتن از شتاب، و به دست آوردن مکان‌ها و سرعت‌های بعدی، بکار گیریم.

با داشتن شرایط اولیه حرکت بازو که معمولاً به شکل زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned}\theta(0) &= \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) &= 0\end{aligned}\tag{84}$$

می‌توان از (۱۴،۱) در فاصله‌های زمانی Δt به صورت عددی انتگرال گرفت. روش‌های بسیاری برای انتگرال‌گیری عددی، وجود دارند. در اینجا ساده‌ترین روش انتگرال‌گیری عددی، به نام روش انتگرال‌گیری اویلر را که به صورت زیر انجام می‌شود، ارائه می‌کنیم: از لحظه $t=0$ آغاز، و عبارت‌های زیر را به روش تکرار محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t+\Delta t) &= \dot{\theta}(t) + \ddot{\theta}(t)\Delta t \\ \theta(t+\Delta t) &= \theta(t) + \dot{\theta}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\theta}(t)\Delta t^2\end{aligned}\tag{85}$$

در هر تکرار معادله (۱۳،۱) برای محاسبه $\ddot{\theta}$ حل می‌شود. بدین ترتیب مکان سرعت، و شتاب بازو، که بر اثر اعمال تابع گشتاور ورودی معین ایجاد شده است، به صورت عددی محاسبه خواهند شد. اگر چه روش اویلر مفهومی ساده دارد، اما روش‌های انتگرال‌گیری پیچیده‌تری موجودند که برای به دست آوردن جواب‌های دقیق با بازه بالا توصیه می‌شوند. انتخاب مقدار Δt مورد بحث است. Δt را باید آن قدر کوچک انتخاب کرد که شکستن زمان (که پیوسته است) به این فاصله‌های کوچک، تقریبی قابل قبول به دست دهد و از سوی دیگر، Δt باید آن قدر بزرگ باشد که کامپیوتر برای محاسبه یک شبیه‌سازی، زمان محاسباتی زیادی صرف نکند.

در بیشتر حالت‌ها، حرکات بازوی مکانیکی ماهر را به صورت حرکت چهارچوب ابزار $\{T\}$ نسبت به چهارچوب ایستگاه $\{S\}$ در نظر می‌گیریم. این در واقع همان ترکیبی است که استفاده‌کننده نهایی از سیستم نیز در ذهن خود رعایت می‌کند.

پیوست

کد های نرم افزار متلب مورد استفاده در این پروژه

```
function [R]=rot(axis,q)
if axis==1
    R=[1,0,0,0;0,cos(q),-sin(q),0;0,sin(q),cos(q),0;0,0,0,1];
elseif axis==2
    R=[cos(q),0,sin(q),0;0,1,0,0;-sin(q),0,cos(q),0;0,0,0,1];
elseif axis==3
    R=[cos(q),-sin(q),0,0;sin(q),cos(q),0,0;0,0,1,0;0,0,0,1];
else
```



```

wrong axis
stop
end

```

```

function [H]=trans(axis,q)
if axis==1
    H=[1,0,0,q;0,1,0,0;0,0,1,0;0,0,0,1];
elseif axis==2
    H=[1,0,0,0;0,1,0,q;0,0,1,0;0,0,0,1];
elseif axis==3
    H=[1,0,0,0;0,1,0,0;0,0,1,q;0,0,0,1];
else
    wrong axis
    stop
end

```

```

clc;clear all;close all;
syms L1 L2 L3 L4 m1 m2 m3 m4 positive;
syms taw1 taw2 taw3 taw4 taw5 taw6 real;
syms theta1 theta2 theta3 theta4 theta5 theta6 g real;
syms dtheta1 dtheta2 dtheta3 dtheta4 dtheta5 dtheta6 real;
syms ddtheta1 ddtheta2 ddtheta3 ddtheta4 ddtheta5 ddtheta6 real;
qq=[theta1 theta2 theta3 theta4 theta5 theta6]';
dq=[dtheta1 dtheta2 dtheta3 dtheta4 dtheta5 dtheta6]';
ddq=[ddtheta1 ddtheta2 ddtheta3 ddtheta4 ddtheta5 ddtheta6]';
stat=[qq;dq];dstat=[dq;ddq];

% Link 1
h01=rot(3,theta1);
R01=h01(1:3,1:3);
w01=dtheta1*[0,0,1]';
rm11=[L1/2,0,0,1]';
r01=h01*rm11;
r01=simplify(r01(1:3));
v01=simplify(jacobian(r01,stat)*dstat);
I1=[0,0,0;0,m1*L1^2/12,0;0,0,m1*L1^2/12];
T1=m1*v01'*v01/2+w01'*I1*w01/2;
U1=m1*g*r01(3);

% Link 2
h12=trans(1,L1)*rot(3,theta2);
h02=h01*h12;
R12=h12(1:3,1:3);
w12=dtheta2*[0,0,1]';
w02=R12'*w01+w12;
rm22=[L2/2,0,0,1]';
r02=h02*rm22;
r02=simplify(r02(1:3));
v02=simplify(jacobian(r02,stat)*dstat);
I2=[0,0,0;0,m2*L2^2/12,0;0,0,m2*L2^2/12];
T2=m2*v02'*v02/2+w02'*I2*w02/2;
U2=m2*g*r02(3);

% Link 3
h23=trans(1,L2)*[1,0,0,0;0,0,-
1,0;0,1,0,0;0,0,0,1]*rot(3,theta3)*rot(1,theta4);
h03=h02*h23;

```

```

R23=h23(1:3,1:3);
w23=[dtheta4,0,dtheta3]';
w03=R23'*w02+w23;
rm33=[L3/2,0,0,1]';
r03=h03*rm33;
r03=simplify(r03(1:3));
v03=simplify(jacobian(r03,stat)*dstat);
I3=[0,0,0;0,m3*L3^2/12,0;0,0,m3*L3^2/12];
T3=m3*v03'*v03/2+w03'*I3*w03/2;
U3=m3*g*r03(3);

% Link 4
h34=trans(1,L3)*rot(3,theta5)*rot(1,theta6);
h04=h03*h34;
R34=h34(1:3,1:3);
w34=[dtheta6,0,dtheta5]';
w04=R34'*w03+w34;
rm44=[L4/2,0,0,1]';
r04=h04*rm44;
r04=simplify(r04(1:3));
v04=simplify(jacobian(r04,stat)*dstat);
I4=[0,0,0;0,m4*L4^2/12,0;0,0,m4*L4^2/12];
T4=m4*v04'*v04/2+w04'*I4*w04/2;
U4=m4*g*r04(3);

% Total Energy
T=simplify(expand(T1+T2+T3+T4));
U=simplify(expand(U1+U2+U3+U4));
Lg=simplify(expand(T-U));

% Motion Equalation
Lg_qd=jacobian(Lg,dqq)';
Lg_qd_t=simple(jacobian(Lg_qd,stat)*dstat);
Lg_q=jacobian(Lg,qq)';
Eq_l=Lg_qd_t-Lg_q;
M=simplify(jacobian(Eq_l,ddqq));
f=simplify(Eq_l-M*ddqq);

Eq_r=jacobian(w01,dqq)'*[0,0,taw1-taw2]+jacobian(w02,dqq)'*[0,-
taw3,taw2]+jacobian(w03,dqq)'*[taw4-taw6,0,taw3-taw5]'
+jacobian(w04,dqq)'*[taw6 0 taw5]';
B=simplify(jacobian(Eq_r,[taw1;taw2;taw3;taw4;taw5;taw6]));

```